Espaces préhilbertiens

Espace préhilbertien réel

Exercice 1 [00504] [correction]
Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $(\operatorname{tr}(AB+BA))^2 \leqslant 4\operatorname{tr}(A^2)\operatorname{tr}(B^2)$.

Exercice 2 [00505] [correction]
Démonter que la boule unité fermée B d'un espace préhilbertien réel est strictement convexe i.e. que pour tout $x, y \in B$ différents et tout $t \in]0,1[$, $\|(1-t)x+ty\| < 1$.

Exercice 3 [00507] [correction]
Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires d'un espace préhilbertien réel E telle que

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (e_i \mid x)^2$$

Montrer que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ constitue une base orthonormée de E.

Exercice 4 [00508] [correction]
Soient E un espace préhilbertien réel et $f, g : E \to E$ telles que

$$\forall x, y \in E, (f(x) \mid y) = (x \mid g(y))$$

Montrer que f et g sont linéaires.

Exercice 5 [00509] [correction]
Soient E un espace préhilbertien réel et $f : E \to E$ une application surjective telle que pour tout $x, y \in E$, on ait

$$(f(x) \mid f(y)) = (x \mid y)$$

Montrer que f est un endomorphisme de E.

Exercice 6 [00510] [correction]
Soient x, y deux vecteurs non nuls d'un espace préhilbertien. Etablir :
$\left\|\frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2}\right\| = \frac{\|x-y\|}{\|x\|\|y\|}$.

Exercice 7 [00511] [correction]
On munit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ du produit scalaire défini par $(f \mid g) = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$.
En exploitant le théorème d'approximation uniforme de Weierstrass, établir que l'orthogonal du sous-espace vectoriel F de E formé des fonctions polynomiales est réduit à $\{0\}$.

Exercice 8 [00512] [correction]
Soit E un espace de Hilbert réel.
a) Montrer que pour $x, y \in E$, $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{\|x\|^2+\|y\|^2}{2}$.
b) Soit F un sous-espace vectoriel fermé de E et $a \in E$. Montrer qu'il existe $x \in F$ vérifiant $d(a, F) = \|x - a\|$.
c) Etablir que si H est un hyperplan fermé de E, il existe $a \in E$ vérifiant :
$\forall x \in E$, $x \in H \Leftrightarrow (a \mid x) = 0$.

Exercice 9 [00513] [correction]
Soit E un espace préhilbertien réel.
a) Etablir que pour tout sous-espace vectoriel F de E, $\bar{F} \subset F^{\perp\perp}$.
Désormais, on suppose $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire défini par
$(P \mid Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.
b) Montrer que $H = \left\{P \in \mathbb{R}[X] / \int_{-1}^1 |t|\, P(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}$ est un hyperplan fermé de E.
c) Soit $Q \in H^\perp$. Etablir que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,
$\int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = \left(\int_{-1}^1 |t|\, P(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_{-1}^1 Q(t)\,\mathrm{d}t\right)$
d) Etablir que $H^\perp = \{0\}$ et conclure qu'ici l'inclusion $\bar{H} \subset H^{\perp\perp}$ est stricte.

Exercice 10 Mines-Ponts MP [02666] [correction]
Montrer l'existence et l'unicité de $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P(0) = \int_0^1 A(t)P(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que A est de degré n.

Exercice 11 X MP [03024] [correction]
On définit sur $\mathbb{R}[X]$ le produit scalaire

$$\langle P \mid Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

Existe-t-il $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], P(0) = \langle A \mid P\rangle ?$$

Exercice 12 X MP [03079] [correction]
On définit

$$Q_n(X) = \frac{1}{2^n n!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$$

a) Soit $n \geqslant 1$. Montrer que Q_n possède n racines simples dans $]-1,1[$.
b) Montrer que

$$Q_n = X^n + (X^2-1)R_n(X)$$

avec $R_n \in \mathbb{R}[X]$. En déduire $Q_n(1)$ et $Q_n(-1)$.
c) On pose, pour $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$,

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que Q_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
d) Calculer $\|Q_n\|^2$.

Exercice 13 [03081] [correction]
Soit $E = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par

$$\langle f \mid g\rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

On pose

$$F = \{f \in E/\forall t \in [-1,0], f(t) = 0\} \text{ et } G = \{g \in E/\forall t \in [0,1], g(t) = 0\}$$

a) Montrer que $F^\perp = G$.
b) Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 14 [03157] [correction]
Soit $\mathcal{F} = (x_1,\ldots,x_n)$ une famille de $n \geqslant 2$ vecteurs d'un espace préhilbertien réel. On suppose

$$\forall 1 \leqslant i \neq j \leqslant n, (x_i \mid x_j) < 0$$

Montrer que toute sous famille de $n-1$ vecteurs de $\mathcal{F}$ est libre.

Exercice 15 [03180] [correction]
Soit S l'ensemble des vecteurs de norme 1 d'un espace préhilbertien réel. Montrer

$$\forall x, y \in S, x \neq y \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}, (1-\lambda)x + \lambda y \notin S$$

Espace préhilbertien complexe

Exercice 16 [00514] [correction]
On définit une application $\varphi : \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}$ par

$$\varphi(P,Q) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{P(\mathrm{e}^{i\theta})}Q(\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta$$

a) Montrer que φ est un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}[X]$.
b) Montrer que $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormée pour le produit scalaire précédent.
c) Soit $Q = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$. Calculer $\|Q\|^2$.
d) On pose

$$M = \sup_{|z|=1} |Q(z)|$$

Montrer que $M \geqslant 1$ et étudier le cas d'égalité

Exercice 17 [00515] [correction]
Soient E un espace préhilbertien complexe et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$,

$$(u(x) \mid x) = 0$$

Montrer que $u = \tilde{0}$.

Exercice 18 [03080] [correction]
On pose

$$H = \left\{(x_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} / \sum_{n=0}^{+\infty} |x_{n+1} - x_n|^2 < +\infty\right\}$$

Montrer que H est un espace préhilbertien

Espaces euclidiens et hermitiens

Exercice 19 [00516] [correction]
On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par

$$(A \mid B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$$

a) Montrer que la base canonique $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormée.
b) Observer que les espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.
c) Etablir que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a

$$\mathrm{tr}(A) \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\mathrm{tr}({}^tAA)}$$

et préciser les cas d'égalité.

Exercice 20 [00517] [correction]
Soit a un vecteur normé d'un espace vectoriel euclidien E. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère l'endomorphisme $f_\alpha : x \mapsto x + \alpha(a \mid x)a$.
a) Préciser la composée $f_\alpha \circ f_\beta$. Quelles sont les f_α bijectives ?
b) Déterminer les éléments propres de f_α.

Exercice 21 [00518] [correction]
Soient a, b deux vecteurs unitaires d'un espace vectoriel euclidien E et

$$f : x \to x - (a \mid x)b$$

a) A quelle condition la fonction f est-elle bijective ?
b) Exprimer $f^{-1}(x)$ lorsque c'est le cas.
c) A quelle condition l'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 22 [00519] [correction]
Montrer que dans $\mathbb{R}^3$ euclidien : $a \wedge (b \wedge c) = (a \mid c)b - (a \mid b)c$. (on pourra utiliser les coordonnées de a, b, c dans une base où elles comportent un maximum de 0)
Trouver les valeurs propres et vecteurs propres de $f(x) = a \wedge (a \wedge x)$ où a est un vecteur unitaire puis reconnaître f.

Exercice 23 Mines-Ponts PC [00520] [correction]
Soient $x_1, x_2, ..., x_{n+2}$ des vecteurs d'un espace vectoriel euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$.
Montrer qu'il est impossible que

$$\forall i \neq j, (x_i \mid x_j) < 0$$

On pourra commencer par les cas $n = 1$ et $n = 2$

Exercice 24 [00521] [correction]
Soient E un espace hermitien et $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille orthonormée vérifiant

$$\forall x \in E, \sum_{k=1}^{n} \left|(e_k \mid x)\right|^2 = \|x\|^2$$

Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Exercice 25 [00523] [correction]
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien E tel que

$$\forall x \in E, (f(x) \mid x) = 0$$

Comparer $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$.

Exercice 26 Centrale MP [02396] [correction]
Soit $(E, \langle \mid \rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{tr}(u) = 0$.
a) Montrer qu'il existe $x \in E\backslash\{0\}$ tel que $\langle u(x) \mid x\rangle = 0$.
b) Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est à diagonale nulle.

Exercice 27 Mines-Ponts MP [02733] [correction]
Soient $c \in \mathbb{R}$, $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$, $v_1, \ldots, v_n$ des vecteurs unitaires de E deux à deux distincts tels que :

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2, i \neq j \Rightarrow \langle v_i, v_j \rangle = c$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur c pour que $(v_1, \ldots, v_n)$ soit nécessairement liée.

Projections orthogonales

Exercice 28 [00524] [correction]
Soient E un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée
$\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et F un sous-espace vectoriel de E muni d'une base orthonormée
$(x_1, \ldots, x_p)$. Montrer

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p_F) = \sum_{k=1}^{p} X_k {}^t X_k$$

où X_k est la colonne des composantes de x_k dans $\mathcal{B}$.

Exercice 29 [00530] [correction]
[Formule de Parseval]
On suppose que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale d'un espace préhilbertien E telle que $V = \mathrm{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit dense dans E. Montrer que pour tout $x \in E$,

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |(e_n \mid x)|^2$$

Exercice 30 Centrale MP [02408] [correction]
On se place dans l'espace euclidien E.
1) Soit p un projecteur de E.
Etablir l'équivalence des conditions suivantes :
(i) p est un projecteur orthogonal,
(ii) $\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$,
(iii) p est autoadjoint.
2) Soient p et q deux projecteurs orthogonaux.
a) Montrer que $p \circ q \circ p$ est autoadjoint.
b) Montrer que

$$(\mathrm{Im} p + \ker q)^{\perp} = \mathrm{Im} q \cap \ker p$$

c) Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.

Exercice 31 [02732] [correction]
Soient p et q des projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien E.
a) Montrer que $p \circ q \circ p$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont comprises entre 0 et 1.
b) Déterminer $(\mathrm{Im} p + \ker q)^{\perp}$
c) En déduire que $p \circ q$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont comprises entre 0 et 1.

Exercice 32 [01331] [correction]
Soient A et B dans $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$ et $B^2 = B$.
a) La matrice AB est-elle diagonalisable ?
b) Encadrer les valeurs propres de AB.

Distance à un sous-espace vectoriel

Exercice 33 [00526] [correction]
[Déterminant de Gram]
Soit E un espace préhilbertien réel. Pour $(u_1, \ldots, u_p)$ famille de vecteurs de E, on note $G(u_1, \ldots, u_p)$ la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont le coefficient d'indice (i, j) est $(u_i \mid u_j)$.
a) Montrer que la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre si, et seulement si,

$$\det G(u_1, \ldots, u_p) \neq 0$$

b) Montrer que si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base d'un sous-espace vectoriel F de E alors pour tout $x \in E$,

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{\det G(e_1, \ldots, e_p, x)}{\det G(e_1, \ldots, e_p)}}$$

Exercice 34 [00527] [correction]
a) Montrer que $(P \mid Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
b) Calculer $d(X^2, P)$ où $P = \left\{aX + b/(a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$

Exercice 35 Mines-Ponts MP [02734] [correction]
Calculer le minimum de $\int_0^1 (t^3 - at^2 - bt - c)^2 \mathrm{d}t$, a, b, c parcourant $\mathbb{R}$.

Exercice 36 [00529] [correction]
On définit une application $\varphi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ par

$$\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
b) Calculer $\varphi(X^p, X^q)$.
c) Déterminer

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(t^2 - (at + b))^2\,\mathrm{d}t$$

Exercice 37 Mines-Ponts MP [02736] [correction]
On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire rendant orthonormé la base canonique, dont on note $\| \ \|$ la norme associée. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|M - aI_n - bJ\|$.

Exercice 38 Mines-Ponts MP [02735] [correction]
Calculer

$$\inf\left\{\int_0^1 t^2(\ln t - at - b)^2 \,\mathrm{d}t, (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Exercice 39 Mines-Ponts MP [01332] [correction]
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\langle\, ,\rangle : (P,Q) \in E^2 \mapsto \langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$
a) Justifier la définition de $\langle\, ,\rangle$ et montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.
On pose $F = \{P \in E, P(0) = 0\}$. On cherche à déterminer $d(1, F)$. On note $(P_0, \ldots, P_n)$ l'orthonormalisée de Schmidt de $(1, X, \ldots, X^n)$.
b) Calculer $P_k(0)^2$.
c) Déterminer une base de $F^\perp$ que l'on exprimera dans la base $(P_0, \ldots, P_n)$. En déduire $d(1, F^\perp)$ et $d(1, F)$.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit un produit scalaire par $(A \mid B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$.
Pour $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(AB + BA) = 2(A \mid B)$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit la relation demandée.

Exercice 2 : [énoncé]
Par l'inégalité triangulaire $\|(1-t)x + ty\| \leqslant (1-t)\|x\| + t\|y\| \leqslant 1$. De plus s'il y a égalité alors $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$ et les vecteurs $(1-t)x$ et ty sont positivement liés. Les vecteurs x et y étant unitaires et positivement liés ils sont égaux, ce qui est exclu.

Exercice 3 : [énoncé]
Pour $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\|e_j\|^2 = \sum_{i=1}^n (e_i \mid e_j)^2$$

donc $(e_i \mid e_j) = 0$ pour tout $i \neq j$. Ainsi la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est orthonormée.
Si la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ n'est pas une base, on peut déterminer $e_{n+1} \in E$ tel que $(e_1, e_2, \ldots, e_n, e_{n+1})$ soit libre. Par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, on peut se ramener au cas où

$$e_{n+1} \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)^\perp$$

Mais alors

$$\|e_{n+1}\|^2 = \sum_{i=1}^n (e_i \mid e_{n+1})^2 = 0$$

ce qui est contradictoire.
Par suite la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée.

Exercice 4 : [énoncé]
Aisément

$$(f(\lambda x + \lambda' x') \mid y) = \ldots = (\lambda f(x) + \lambda' f(x') \mid y)$$

et comme ceci vaut pour tout y on peut conclure à la linéarité de f.
Idem pour g.

Exercice 5 : [énoncé]
Aisément $(f(\lambda x + \lambda' x') \mid f(y)) = (\lambda f(x) + \lambda' f(x') \mid f(y))$ donc $f(\lambda x + \lambda' x') - (\lambda f(x) + \lambda' f(x')) \in (\mathrm{Im} f)^\perp = \{o\}$ d'où la linéarité de f.

Exercice 6 : [énoncé]
$\left\| \frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2} \right\|^2 = \frac{1}{\|x\|^2} - 2\frac{(x|y)}{\|x\|^2\|y\|^2} + \frac{1}{\|y\|^2} = \left(\frac{\|x-y\|}{\|x\|\|y\|} \right)^2$

Exercice 7 : [énoncé]
Soit $f \in F^\perp$. Puisque f est continue sur le segment $[a, b]$, par le théorème d'approximation uniforme de Weierstrass : $\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathbb{R}[X], \|f - P\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \varepsilon$.
On a alors $\|f\|^2 = \int_a^b f^2 = \int_a^b f(f-P) + \int_a^b fP = \int_a^b f(f-P)$ avec $\left|\int_a^b f(f-P)\right| \leqslant (b-a)\|f\|_\infty \|f-P\|_\infty \leqslant (b-a)\|f\|_\infty \varepsilon$.
En faisant tendre ε vers 0, on obtient $\|f\|^2 = 0$ donc $f = 0$. Ainsi $F^\perp \subset \{0\}$ puis $F^\perp = \{0\}$.

Exercice 8 : [énoncé]
a) C'est l'identité du parallélogramme.
b) $d(a, F) = \inf\{\|x - a\| / x \in F\}$. Considérons une suite (x_n) d'éléments de F réalisant la borne inférieure : $\|x_n - a\| \to d(a, F)$.
En appliquant l'identité du parallélogramme à $x = x_n - a$ et $y = x_m - a$, on obtient $\left\|\frac{x_n + x_m}{2} - a\right\|^2 + \frac{1}{4}\|x_n - x_m\|^2 = \frac{\|x_n - a\|^2 + \|x_m - a\|^2}{2}$.
Or $\frac{x_n + x_m}{2} \in F$ donc $\left\|\frac{x_n + x_m}{2} - a\right\| \geqslant d(a, F)$ puis $\frac{1}{4}\|x_n - x_m\|^2 \leqslant \frac{\|x_n - a\|^2 + \|x_m - a\|^2}{2} - d(a, F)^2$.
Sachant que $\|x_n - a\| \to d(a, F)$, on peut affirmer que la suite (x_n) est de Cauchy. Par suite celle-ci converge et, puisque F est fermé, sa limite x_∞ vérifie $x_\infty \in F$ et $\|x_\infty - a\| = d(a, F)$.
c) Puisque $H \neq E$, il existe $y \in E \backslash H$. Soit alors $x \in H$ vérifiant $d(y, H) = \|x - y\|$. Pour tout $z \in H$, on a $\|(x + \lambda z) - y\|^2 \geqslant \|x - y\|^2$ donc $2\lambda(x - y \mid z) + \lambda^2\|z\|^2 \geqslant 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. On en déduit que $(x - y \mid z) = 0$ puis que $a = x - y \in H^\perp$ avec $a \neq 0$ car $y \notin H$.
Ainsi, on dispose d'un vecteur a vérifiant $\forall x \in H$, $(a \mid x) = 0$ i.e. H et $\mathrm{Vect}(a)$ orthogonaux.
De plus, puisque H est un hyperplan et que $a \notin H$, on a $H \oplus \mathrm{Vect}(a) = E$.
H et $\mathrm{Vect}(a)$ sont donc supplémentaires orthogonaux et par suite $H = \mathrm{Vect}(a)^\perp$.

Exercice 9 : [énoncé]
a) On sait $F \subset F^{\perp\perp}$ et $F^{\perp\perp}$ fermé donc $\bar{F} \subset F^{\perp\perp}$.
b) H est le noyau de la forme linéaire $\varphi : P \mapsto \int_{-1}^{1} |t|\, P(t)\,\mathrm{d}t$. En vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|\varphi(P)| \leqslant \|P\|$ et donc φ est continue. Par suite H est un hyperplan fermé.
c) Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on observe que $R = P - \int_{-1}^{1} |u|\, P(u)\,\mathrm{d}u$ appartient à H. La relation $(R \mid Q) = 0$ donne la relation voulue.
d) La relation précédente donne $\int_{-1}^{1} \left(Q(t) - |t| \int_{-1}^{1} Q(u)\,\mathrm{d}u\right) P(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$. Par suite $Q(t) = |t| \int_{-1}^{1} Q(u)\,\mathrm{d}u$ ce qui n'est possible que si $\int_{-1}^{1} Q(u)\,\mathrm{d}u = 0$ et $Q = 0$.
Ainsi $H^{\perp} = \{0\}$ puis $H^{\perp\perp} = E$ alors que $\bar{H} = H \neq E$.

Exercice 10 : [énoncé]
$(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ et l'application $P \mapsto P(0)$ y est une forme linéaire donc il existe un unique polynôme $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que cette forme linéaire corresponde au produit scalaire avec A.
Si $\deg A < n$ alors pour $P = XA$, $\int_0^1 tA(t)^2\,\mathrm{d}t = 0$. Or $t \mapsto tA(t)^2$ est continue positive donc $A = 0$ ce qui est absurde.

Exercice 11 : [énoncé]
Supposons l'existence d'un tel polynôme A.
Pour $P_n = (1 - X)^n$, on obtient $1 = \int_0^1 A(t)(1 - t)^n\,\mathrm{d}t$.
Or
$$\left|\int_0^1 A(t)(1-t)^n\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \|A\|_\infty \int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{d}t = \frac{\|A\|_\infty}{n+1} \to 0$$
il y a donc une absurdité.

Exercice 12 : [énoncé]
a) 1 et -1 sont racines de multiplicité n du polynôme $(X^2 - 1)^n$.
1 et -1 sont donc racines des polynômes
$$(X^2-1)^n, \left((X^2-1)^n\right)', \ldots, \left((X^2-1)^n\right)^{(n-1)}$$
En appliquant le théorème de Rolle, on peut alors montrer par récurrence sur $k \in \{0, \ldots, n\}$ que $\left((X^2-1)^n\right)^{(k)}$ possède au moins k racines dans l'intervalle $]-1, 1[$.
En particulier Q_n possède au moins n racines dans $]-1, 1[$, or $\deg Q_n = n$ donc il n'y a pas d'autres racines que celles-ci et elles sont simples.
b) Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$, c'est immédiat.
Supposons la propriété établie au rang $n \geqslant 0$.
$$Q_{n+1}(X) = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\left(2(n+1)X(X^2-1)^n\right)^{(n)}$$
Par la formule de Leibniz
$$Q_{n+1}(X) = \frac{1}{2^n n!}\left(X\left((X^2-1)^n\right)^{(n)} + nX\left((X^2-1)^n\right)^{(n-1)}\right)$$
1 et -1 sont racines du polynôme $\left((X^2-1)^n\right)^{(n-1)}$ et donc celui-ci peut s'écrire $(X^2-1)S(X)$.
En exploitant l'hypothèse de récurrence, on obtient
$$Q_{n+1}(X) = X^{n+1} + X(X^2-1)R_n(X) + 2nX(X^2-1)S(X) = X^{n+1} + (X^2-1)R_{n+1}(X)$$
Récurrence établie
c) Par intégration par parties successives et en exploitant l'annulation en 1 et -1 des polynômes
$$(X^2-1)^n, \left((X^2-1)^n\right)', \ldots, \left((X^2-1)^n\right)^{(n-1)}$$
on obtient
$$\int_{-1}^{1} P(t)Q_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1} P^{(n)}(t)(t^2-1)^n\,\mathrm{d}t$$
En particulier, si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$,
$$\int_{-1}^{1} P(t)Q_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$$
d) Par la relation qui précède
$$\int_{-1}^{1} (Q_n(t))^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} Q_n^{(n)}(t)(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t$$
Puisque le polynôme $(X^2-1)^n$ est unitaire et de degré $2n$
$$\left[(X^2-1)^n\right]^{(2n)} = (2n)! \text{ et } Q_n^{(n)} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

De plus, par intégration par parties successives

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t=\int_0^1(1-t)^n(1+t)^n\,\mathrm{d}t=\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Au final

$$\|Q_n\|^2=\frac{2}{(2n+1)}$$

Exercice 13 : [énoncé]
a) Soient $f\in F$ et $g\in G$.

$$\langle f\mid g\rangle=\int_{-1}^{1}f(t)g(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}0\,\mathrm{d}t=0$$

Les sous-espaces vectoriels F et G sont orthogonaux et donc $G\subset F^\perp$.
Inversement, soit $g\in F^\perp$.
Montrons que, pour tout $x\in\,]0,1[$, $g(x)=0$.
Par l'absurde, supposons $g(x)\neq 0$ pour un $x\in\,]0,1[$ et, quitte à considérer la fonction $-g$, supposons $g(x)>0$. Par continuité de g, il existe $\alpha>0$ tel que

$$[x-\alpha,x+\alpha]\subset\,]0,1[\text{ et }g(t)>0\text{ sur }[x-\alpha,x+\alpha]$$

Considérons alors la fonction f définie par le schéma.
La fonction f appartient à F et la fonction produit fg est continue, positive mais n'est pas la fonction nulle donc

$$\int_{-1}^{1}f(t)g(t)\,\mathrm{d}t>0$$

C'est absurde car on a supposé $g\in F^\perp$.
On a donc pour tout $x\in\,]0,1[$, $g(x)=0$ puis par continuité, $g(x)=0$ pour tout $x\in[0,1]$.
Ainsi $g\in G$ et finalement $F^\perp=G$.
b) Si les sous-espaces vectoriels étaient supplémentaires alors toutes fonctions continues sur $[-1,1]$ est somme d'une fonction de F et d'une fonction de G et est donc une fonction s'annulant en 0. C'est absurde.
Les sous-espaces vectoriels F et G ne sont donc par supplémentaires.

Exercice 14 : [énoncé]
Raisonnons par récurrence sur $n\geqslant 2$.
Pour $n=2$ la propriété est immédiate car aucun vecteur ne peut être nul.
Supposons la propriété établie au rang $n\geqslant 2$.
Soit $(x_1,\dots,x_{n+1})$ une famille de vecteurs vérifiant

$$\forall 1\leqslant i\neq j\leqslant n+1,(x_i\mid x_j)<0$$

Par projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel de dimension finie $D=\mathrm{Vect}x_{n+1}$, on peut écrire pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$

$$x_i=y_i+\lambda_i x_{n+1}$$

avec y_i un vecteur orthogonal à x_{n+1} et $\lambda_i<0$ puisque $(x_i\mid x_{n+1})<0$.
On remarque alors

$$(x_i\mid x_j)=(y_i\mid y_j)+\lambda_i\lambda_j\|x_{n+1}\|^2$$

et on en déduit

$$\forall 1\leqslant i\neq j\leqslant n,(y_i\mid y_j)<0$$

Par hypothèse de récurrence, on peut affirmer que la famille $(y_2,\dots,y_n)$ est libre et puisque ses vecteurs sont orthogonaux au vecteur x_{n+1} non nul, on peut aussi dire que la famille $(y_2,\dots,y_n,x_{n+1})$ est libre. Enfin, on en déduit que la famille $(x_2,\dots,x_n,x_{n+1})$ car cette dernière engendre le même espace que la précédente et est formée du même nombre de vecteurs.
Par permutation des indices, ce qui précède vaut pour toute sous-famille formée de n vecteurs de la famille initiale $(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})$.
Récurrence établie.

Exercice 15 : [énoncé]
Soient $x,y\in S$ avec $x\neq y$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On a

$$\|(1-\lambda)x+\lambda y\|^2=\lambda^2+2\lambda(1-\lambda)(x\mid y)+(1-\lambda)^2$$

qui est une expression polynomiale en λ dont le coefficient du second degré est

$$2-2(x\mid y)$$

Puisque les vecteurs x et y sont distincts et de même norme, ils ne peuvent être positivement liés et donc

$$(x\mid y)<\|x\|\,\|y\|=1$$

Par suite

$$2-2(x\mid y)>0$$

Ainsi la quantité $\|(1-\lambda)x+\lambda y\|^2$ est une expression polynomiale du second degré exactement. Puisque celle-ci prend la valeur 1 pour $\lambda=0$ et pour $\lambda=1$, elle ne peut reprendre la valeur 1 pour aucune autre valeur λ et ceci permet de conclure.

Exercice 16 : [énoncé]
a) $\varphi(Q,P) = \overline{\varphi(P,Q)}$ et $Q \mapsto \varphi(P,Q)$ linéaire : clair.
$\varphi(P,P) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|P(\mathrm{e}^{i\theta})\right|^2 \mathrm{d}\theta \geqslant 0$ et $\varphi(P,P) = 0 \Rightarrow \forall\theta \in [-\pi,\pi], P(\mathrm{e}^{i\theta}) = 0$ donc $\forall z \in U, P(z) = 0$.
Puisque P admet une infinité de racines, $P = 0$.
b) Soient $k,\ell \in \mathbb{N}$. $\varphi(X^k, X^\ell) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{i(\ell-k)\theta}\mathrm{d}\theta = \delta_{\ell,k}$.
c) $\varphi(Q,Q) = 1 + |a_{n-1}|^2 + \dots + |a_0|^2$ car $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une famille orthonormée.
d) $\varphi(Q,Q) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|Q(\mathrm{e}^{i\theta})\right|^2\mathrm{d}\theta \leqslant M^2$ or $\varphi(Q,Q) \geqslant 1$ donc $M \geqslant 1$.
Si $M = 1$ alors $a_{n-1} = \ldots = a_0 = 0$ et $Q = X^n$. Réciproque immédiate.

Exercice 17 : [énoncé]
Soient $x, y \in E$. $(u(x+y) \mid x+y) = (u(x) \mid y) + (u(y) \mid x) = 0$ et
$(u(x+iy) \mid x+iy) = i(u(x) \mid y) - i(u(y) \mid x) = 0$ donc $(u(x) \mid y) = -(u(x) \mid y)$ puis $(u(x) \mid y) = 0$.
Comme ceci vaut pour tout $y \in E$, on obtient $u(x) = 0$ pour tout $x \in E$.

Exercice 18 : [énoncé]
On sait que
$$\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C}) = \left\{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} / \sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|^2 < +\infty\right\}$$
est un espace de préhilbertien pour le produit scalaire
$$\langle u \mid v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty}\bar{u}_n v_n$$
Considérons alors l'application $\Delta : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ qui à une suite $x = (x_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ associe
$$\Delta(x) = (x_{n+1} - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$
On vérifie aisément que Δ est une application linéaire et que son noyau est égal à l'espace des suites constantes.
Puisque
$$H = \Delta^{-1}\left(\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})\right)$$
H est l'image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire et donc H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$; c'est donc un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
Pour $x, y \in H$, posons
$$\varphi(x,y) = \langle\Delta(x) \mid \Delta(y)\rangle + \overline{x_0}y_0$$
L'application φ est évidemment sesquilinéaire hermitienne.
$$\varphi(x,x) = \|\Delta(x)\|_2^2 + |x_0|^2 \geqslant 0$$
Di $\varphi(x,x) = 0$ alors
$$\|\Delta(x)\|_2 = 0 \text{ et } |x_0| = 0$$
Par suite x est une suite constante et puisque son terme initial est nul, c'est la suite nulle.
Finalement φ est un produit scalaire hermitien sur H et donc H est un espace préhilbertien complexe.

Exercice 19 : [énoncé]
a) $(E_{i,j} \mid E_{k,\ell}) = \mathrm{tr}(E_{j,i}E_{k,\ell}) = \mathrm{tr}(\delta_{i,k}E_{j,\ell}) = \delta_{i,k}\delta_{j,\ell}$.
b) Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$,
$$(A \mid B) = \mathrm{tr}({}^tAB) = \mathrm{tr}(AB) = -\mathrm{tr}(A^tB) = -\mathrm{tr}({}^tBA) = -(B \mid A)$$
donc $(A \mid B) = 0$ et l'orthogonalité des espaces. Leur supplémentarité est connue.
c) L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne
$$|(I_n \mid A)| \leqslant \|I_n\|\,\|A\|$$
d'où
$$\mathrm{tr}(A) \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\mathrm{tr}({}^tAA)}$$
avec égalité si, et seulement si, $\mathrm{tr}(A) \geqslant 0$ et (A, I_n) liée, i.e. $A = \lambda I_n$ avec $\lambda \geqslant 0$.

Exercice 20 : [énoncé]
a) $f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta+\alpha\beta}$.
Si $\alpha = -1$ alors $a \in \ker f_\alpha$ et donc f_α n'est pas bijective.
Si $\alpha \neq -1$ alors, pour $\beta = -\frac{\alpha}{1+\alpha}$, $f_\beta \circ f_\alpha = f_\alpha \circ f_\beta = f_0 = \mathrm{Id}$ d'où la bijectivité de f_α.
b) Tout vecteur non nul orthogonal à a est vecteur propre associé à la valeur propre 1.
Tout vecteur non nul colinéaire à a est vecteur propre associé à la valeur propre $1+\alpha$.
Pour une raison de dimension, il ne peut y avoir d'autres vecteurs propres.

Exercice 21 : [énoncé]
a) L'application f est linéaire.
Si $x \in \ker f$ alors $x = (a \mid x)b$ donc $(a \mid x) = (a \mid x)(a \mid b)$.
Si $(a \mid x) \neq 0$ alors $(a \mid b) = 1$ et donc $b = a$.
Par contraposée si $a \neq b$ alors $(a \mid x) = 0$ et $x = 0$ donc f bijective.
En revanche si $a = b$ alors $a \in \ker f$ et f n'est pas bijective.
b) Supposons $a \neq b$. Si $y = f(x)$ alors $y = x - (a \mid x)b$ puis
$(a \mid y) = (a \mid x)(1 - (a \mid b))$ et donc

$$x = y + \frac{(a \mid y)}{1 - (a \mid b)}b$$

c)

$$f(x) = \lambda x \Leftrightarrow (a \mid x)b = (1 - \lambda)x$$

Soit λ une valeur propre. Il existe $x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$ donc
$(a \mid x)b = (1 - \lambda)x$ puis $(a \mid x)(a \mid b) = (1 - \lambda)(a \mid x)$ ce qui donne $(a \mid x) = 0$ (qui implique $\lambda = 1$ avec $E_\lambda(f) = \{a\}^\perp$) ou $\lambda = 1 - (a \mid b)$.
Si $(a \mid b) = 0$: $\lambda = 1$ est seule valeur propre et l'espace propre associé est l'hyperplan de vecteur normal a.
L'endomorphisme n'est alors pas diagonalisable.
Si $(a \mid b) \neq 0$: $\lambda = 1$ et $\lambda = 1 - (a \mid b)$ sont valeurs propres et puisque $E_1(f)$ est un hyperplan, l'endomorphisme est diagonalisable.

Exercice 22 : [énoncé]
Soient u un vecteur unitaire tel que $a \in \mathrm{Vect} u$ et v un vecteur unitaire orthogonal à v tel que $b \in \mathrm{Vect}(u, v)$. Il suffit ensuite de travailler dans $(u, v, u \wedge v)$.
Soit $x \neq 0$.

$$f(x) = \lambda x \Leftrightarrow (\lambda + 1)x = (a \mid x)a$$

Si x est orthogonal à a alors x est vecteur propre associé à la valeur propre -1.
Sinon x est vecteur propre si, et seulement si, x est colinéaire à a. Or $f(a) = 0$ donc a, puis x, est vecteur propre associé à la valeur propre 0.
On reconnaît en f l'opposé de la projection orthogonale sur le plan de vecteur normal a.

Exercice 23 : [énoncé]
Cas $n = 1$.
Supposons disposer de vecteurs x_1, x_2, x_3 tels que

$$\forall i \neq j, (x_i \mid x_j) < 0$$

Puisque $x_1 \neq 0$, (x_1) est une base de E.
Cela permet d'écrire $x_2 = \lambda x_1$ et $x_3 = \mu x_1$.
$(x_2 \mid x_1) < 0$ et $(x_3 \mid x_1) < 0$ donne $\lambda < 0$ et $\mu < 0$ mais alors
$(x_2 \mid x_3) = \lambda\mu \left\|x_1\right\|^2 > 0$!
Cas $n = 2$.
Supposons disposer de vecteurs $x_1, ..., x_4$ tels que

$$\forall i \neq j, (x_i \mid x_j) < 0$$

x_1 étant non nul on peut écrire

$$\forall i \geqslant 2, x_i = \lambda_i x_1 + y_i$$

avec $y_i \in \{x_1\}^\perp$ et $\lambda_i < 0$.
On

$$\forall i \neq j \geqslant 2, (x_i \mid x_j) = \lambda_i\lambda_j + (y_i \mid y_j) < 0$$

donc $(y_i \mid y_j) < 0$.
y_2, y_3, y_4 se positionnant sur la droite $\{x_1\}^\perp$, l'étude du cas $n = 1$ permet de conclure.
Cas général.
Par récurrence sur $n \geqslant 1$.
Pour $n = 1$: ci-dessus
Supposons la propriété établie au rang $n \geqslant 1$.
Supposons disposer de vecteurs $x_1, ..., x_{n+3}$ tels que

$$\forall i \neq j, (x_i \mid x_j) < 0$$

à l'intérieur d'un espace vectoriel euclidien de dimension $n + 1$.
x_1 étant non nul on peut écrire

$$\forall i \geqslant 2, x_i = \lambda_i x_1 + y_i$$

avec $y_i \in \{x_1\}^\perp$ et $\lambda_i < 0$.
On a

$$\forall i \neq j \geqslant 2, (x_i \mid x_j) = \lambda_i\lambda_j + (y_i \mid y_j) < 0$$

donc $(y_i \mid y_j) < 0$.
$y_2, ..., y_{n+2}$ se positionnant sur le sous-espace vectoriel $\{x_1\}^\perp$ qui est de dimension n, l'hypothèse de récurrence permet de conclure.
Récurrence établie.

Exercice 24 : [énoncé]
Soit $x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)^\perp$. On a

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n |(e_k \mid x)|^2 = 0$$

donc $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)^\perp = \{0\}$ puis $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = E$. Par suite $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice et c'est bien entendu une famille libre donc une base de E.

Exercice 25 : [énoncé]
$\forall x, y \in E$, $(f(x+y) \mid x+y) = 0$, or $(f(x+y) \mid x+y) = (f(x) \mid x) + (f(y) \mid y) + (f(x) \mid y) + (f(y) \mid x) = (f(x) \mid y) + (f(y) \mid x)$.
Si $x \in \ker f$ alors $\forall y \in E, (x \mid f(y)) = -(f(x) \mid y) = 0$ donc $x \in (\text{Im} f)^\perp$. Ainsi $\ker f \subset (\text{Im} f)^\perp$.
De plus par le théorème du rang il y égalité des dimensions donc $\ker f = (\text{Im} f)^\perp$.

Exercice 26 : [énoncé]
a) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. $\text{tr} u = 0$ donne

$$\sum_{i=1}^n \langle e_i \mid u(e_i) \rangle = 0$$

Si $\dim E = 1$: ok
Si $\dim E > 1$, il existe $i \neq j$ tel que $\langle e_i \mid u(e_i) \rangle \geqslant 0$ et $\langle e_j \mid u(e_j) \rangle \leqslant 0$.
L'application $t \mapsto \langle u(te_i + (1-t)e_j) \mid te_i + (1-t)e_j \rangle$ est continue, à valeurs réelles et change de signe, en vertu du théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule et donc il existe $t \in [0,1]$ tel que pour $x = te_i + (1-t)e_j$, $\langle u(x) \mid x \rangle = 0$.
De plus, l'indépendance de e_i et e_j assure $x \neq 0$.
b) Il existe ε_1 vecteur unitaire tel que

$$\langle \varepsilon_1 \mid u(\varepsilon_1) \rangle = 0$$

On complète celui-ci en une base orthonormée $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$. La matrice de u dans cette base est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \star \\ \star & A \end{pmatrix}$$

avec $\text{tr} A = 0$. Considérons alors u' l'endomorphisme de $E' = \text{Vect}(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ de matrice A dans la base $(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$. Puisque $\text{tr} u' = \text{tr} A = 0$, un principe de récurrence permet de former une base orthonormée $(\varepsilon_2', \dots, \varepsilon_n')$ de E' dans laquelle u' est représenté par une matrice de diagonale nulle. La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2', \dots, \varepsilon_n')$ est alors une base orthonormée solution du problème posé.

Exercice 27 : [énoncé]
On remarque que
$\langle v_i \mid \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \rangle = c\lambda_1 + \dots + c\lambda_{i-1} + \lambda_i + c\lambda_{i+1} + \dots + c\lambda_n$.
Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & & (c) \\ & \ddots & \\ (c) & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Supposons la famille $(v_1, \dots, v_n)$ libre.
Si $X = {}^t(x_1 \dots x_n) \in \ker A$ alors en posant $u = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$on a $\forall 1 \leqslant i \leqslant n, \langle v_i, u \rangle = 0$.
On en déduit $u \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)^\perp$ et donc $u = 0$.
Ainsi $x_1 = \dots = x_n = 0$ et donc la matrice A est inversible.
Inversement, supposons la matrice A inversible.
Si $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda v_n = 0$ alors pour $X = {}^t(\lambda_1 \dots \lambda_n)$, $AX = 0$ donc $X = 0$ puis $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ et donc la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est libre.
Enfin, puisque $\det A = (1 + (n-1)c)(1-c)^{n-1}$, la condition nécessaire et suffisante cherchée est $c \neq 1$ et $c \neq -1/(n-1)$.

Exercice 28 : [énoncé]
$p_F(x) = \sum\limits_{k=1}^p (x_k \mid x) x_k$ donc $p_F(e_i) = \sum\limits_{k=1}^n ({}^t X_k E_i) x_k$ en notant $E_i = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e_i)$.
Puisque ${}^t X_k E_i$ est un réel, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p_F(e_i)) = \sum\limits_{k=1}^n X_k {}^t X_k E_i$ puis
$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p_F) = \sum\limits_{k=1}^p X_k {}^t X_k$ car $(E_1 \mid \cdots \mid E_n) = I_n$.

Exercice 29 : [énoncé]
On sait déjà $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |(e_n \mid x)|^2 \leqslant \|x\|^2$ en vertu de l'inégalité de Bessel. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in V$ tel que $\|x - y\| \leqslant \varepsilon$. y est une combinaison linéaire des $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $y \in \text{Vect}(e_0, \dots, e_N)$ et donc $\varepsilon \geqslant \|x - y\| \geqslant \|x - p(x)\|$ avec $p(x)$ le projeté de x sur $\text{Vect}(e_0, \dots, e_N)$ c'est-à-dire $p(x) = \sum\limits_{n=0}^N (e_n \mid x) e_n$. Par suite $|\|x\| - \|p(x)\|| \leqslant \|x - p(x)\| \leqslant \varepsilon$ donne $\|x\| \leqslant \|p(x)\| + \varepsilon = \sqrt{\sum\limits_{n=0}^N |(e_n \mid x)|^2} + \varepsilon \leqslant \sqrt{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |(e_n \mid x)|^2} + \varepsilon$ puis quand $\varepsilon \to 0$, on obtient $\|x\| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |(e_n \mid x)|^2}$ et finalement $\|x\|^2 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |(e_n \mid x)|^2$.

Exercice 30 : [énoncé]
a) (i)$\Rightarrow$(ii) par le théorème de Pythagore.
(ii)$\Rightarrow$(i) Supposons (ii). Pour $x \in \mathrm{Im}p$ et $y \in \ker p$, $p(x+\lambda y) = x$ donc

$$\|x\|^2 \leqslant \|x+\lambda y\|^2$$

puis

$$0 \leqslant 2\lambda(x \mid y) + \lambda^2 \|y\|^2$$

Cette relation devant être valable pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $(x \mid y) = 0$.
Par suite $\mathrm{Im}p$ et $\ker p$ sont orthogonaux et donc p est une projection orthogonale.
(i)$\Rightarrow$(iii) car en décomposant x et y on observe

$$(p(x) \mid y) = (p(x) \mid p(y)) = (x \mid p(y))$$

(iii)$\Rightarrow$(i) car $\mathrm{Im}p = \mathrm{Im}p^\star = (\ker p)^\perp$.
b) α) $(p \circ q \circ p)^\star = p \circ q \circ p$ car $p^\star = p$ et $q^\star = q$.
β) $(\mathrm{Im}p + \ker q)^\perp = (\mathrm{Im}p)^\perp \cap (\ker q)^\perp = \ker p \cap \mathrm{Im}q$.
γ) $p \circ q \circ p$ est autoadjoint donc diagonalisable. De plus $\mathrm{Im}p$ est stable par $p \circ q \circ p$ donc il existe donc une base $(e_1, \dots, e_r)$ de $\mathrm{Im}p$ diagonalisant l'endomorphisme induit par $p \circ q \circ p$. On a alors $(p \circ q \circ p)(e_i) = \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Or $e_i \in \mathrm{Im}p$ donc $p(e_i) = e_i$ puis

$$(p \circ q)(e_i) = \lambda_i e_i$$

On complète cette famille de vecteurs propres de $p \circ q$ par des éléments de $\ker q$ pour former une base de $\mathrm{Im}p + \ker q$. Sur ces vecteurs complétant, q est nul donc $p \circ q$ aussi.
Enfin, on complète cette dernière famille par des éléments de $\mathrm{Im}q \cap \ker p$ pour former une base de E. Sur ces vecteurs complétant, $p \circ q$ est nul car ces vecteurs sont invariants par q et annule p. Au final, on a formé une base diagonalisant $p \circ q$.

Exercice 31 : [énoncé]
a) Rappelons que les projections orthogonales sont autoadjointes.
On a $(p \circ q \circ p)^\star = p^\star \circ q^\star \circ p^\star = p \circ q \circ p$ donc $p \circ q \circ p$ est un endomorphisme autoadjoint ; on en déduit qu'il est diagonalisable.
Soit λ une valeur propre de $p \circ q \circ p$ et x un vecteur propre associé, $x \neq 0$.
D'une part $(p \circ q \circ p(x) \mid x) = \lambda \|x\|^2$.
D'autre part $(p \circ q \circ p(x) \mid x) = (q \circ p(x) \mid p(x)) = (q^2 \circ p(x) \mid p(x)) = \|q(p(x))\|^2$.
Or puisque p et q sont des projections orthogonales
$0 \leqslant \|q(p(x))\|^2 \leqslant \|p(x)\|^2 \leqslant \|x\|^2$.
Par suite $\lambda \geqslant 0$ et $\lambda \leqslant 1$.
b) $(\mathrm{Im}p + \ker q)^\perp = (\mathrm{Im}p)^\perp \cap (\ker q)^\perp = \ker p \cap \mathrm{Im}q$.
c) De plus $\mathrm{Im}p$ est stable par l'endomorphisme diagonalisable $p \circ q \circ p$, il existe donc une base $(e_1, \dots, e_r)$ de $\mathrm{Im}p$ diagonalisant l'endomorphisme induit par $p \circ q \circ p$. On a alors $(p \circ q \circ p)(e_i) = \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Or $e_i \in \mathrm{Im}p$ donc $p(e_i) = e_i$ puis $(p \circ q)(e_i) = \lambda_i e_i$. On complète cette famille de vecteurs propres de $p \circ q$ par des éléments de $\ker q$ pour former une base de $\mathrm{Im}p + \ker q$. Sur ces vecteurs complétant, q est nul donc $p \circ q$ aussi. Enfin, on complète cette dernière famille par des éléments de $\mathrm{Im}q \cap \ker p$ pour former une base de E. Sur ces vecteurs complétant, $p \circ q$ est nul car ces vecteurs sont invariants par q et annule p. Au final, on a formé une base diagonalisant $p \circ q$.
Enfin, par l'étude qui précède, les valeurs propres de $p \circ q$ non nulle sont valeurs propres de $p \circ q \circ p$ donc comprises entre 0 et 1.

Exercice 32 : [énoncé]
Notons que les matrices A et B sont des matrices de projections orthogonales car symétriques et idempotentes.
Les cas $A = O_2$ et $A = I_2$ sont immédiats. De même pour les cas $B = O_2$ et $B = I_2$.
On suppose dans la suite ces cas exclus et on travaille donc sous l'hypothèse supplémentaires

$$\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}B = 1$$

a) Si $\mathrm{Im}B = \ker A$ alors $AB = O_2$ est donc AB est diagonalisable.
Si $\mathrm{Im}B = \ker A$ alors en passant à l'orthogonal $\mathrm{Im}A \neq \ker B$.
Les droites $\mathrm{Im}A$ et $\ker B$ étant distinctes dans le plan, elles sont supplémentaires.
Considérons une base (X_1, X_2) adaptée à la supplémentarité de $\mathrm{Im}A$ et $\ker B$.
$ABX_1 = A(BX_1) \in \mathrm{Im}A$ donc on peut écrire $ABX_1 = \lambda X_1$ car $\mathrm{Im}A = \mathrm{Vect}X_1$.
$ABX_2 = 0$ car $BX_2 = 0$.
Ainsi la base (X_1, X_2) diagonalise la matrice AB.
b) Il s'agit ici essentiellement d'encadrer la valeur λ introduite dans l'étude précédente quand $\mathrm{Im}B \neq \ker A$.
On a

$$\lambda \|X_1\|^2 = (\lambda X_1 \mid X_1) = (ABX_1 \mid X_1)$$

Puisque $X_1 \in \mathrm{Im}A$, on peut écrire $X_1 = AU$ et alors

$$(\lambda X_1 \mid X_1) = (ABAU \mid AU)$$

Puisque A est symétrique

$$(ABAU \mid AU) = (BAU \mid A^2U)$$

Puisque $A^2 = A$

$$(BAU \mid A^2U) = (BAU \mid AU)$$

Enfin en procédant de façon semblable

$$(BAU \mid AU) = (B^2AU \mid AU) = (BAU \mid BAU) = \|BX_1\|^2$$

Au final

$$\lambda \|X_1\|^2 = \|BX_1\|^2$$

Or B correspond à une projection orthogonale donc $\|BX_1\|^2 \leqslant \|X_1\|^2$ et on peut affirmer

$$\lambda \in [0,1]$$

Exercice 33 : [énoncé]
a) Si la famille $(u_1,\dots,u_p)$ est liée alors il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_p) \neq (0,\dots,0)$ tel que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = o$ et on observe alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i = 0$ en notant $L_1,\dots,L_n$ les lignes de la matrice $G(u_1,\dots,u_p)$. On conclut $\det G(u_1,\dots,u_p) = 0$.
Si $\det G(u_1,\dots,u_p) = 0$ alors il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_p) \neq (0,\dots,0)$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i = 0$ et on obtient alors que le vecteur $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ est orthogonal à tout u_j c'est donc un vecteur commun à $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)$ et à son orthogonal, c'est le vecteur nul. On conclut que la famille $(u_1,\dots,u_p)$ est liée.
b) $x = u + n$ avec $u \in F$ et $n \in F^\perp$. En développant $\det G(e_1,\dots,e_p,x)$ selon la dernière colonne :

$$\det G(e_1,\dots,e_p,u+n) = \det G(e_1,\dots,e_p,u) + \begin{vmatrix} G(e_1,\dots,e_p) & 0 \\ \star & \|n\|^2 \end{vmatrix}$$

or $\det G(e_1,\dots,e_p,u) = 0$ car la famille est liée et donc

$$\det G(e_1,\dots,e_p,x) = \|n\|^2 \det G(e_1,\dots,e_p)$$

avec $\|n\| = d(x,F)$.

Exercice 34 : [énoncé]
a) Sans difficulté, notamment parce qu'un polynôme de degré $\leqslant 2$ possédant trois racines est nul.
b) $d(X^2,P) = \left\|X^2 - \pi\right\|$ avec $\pi = aX + b$ projeté orthogonal de X^2 sur P.
$(X^2 - \pi \mid 1) = (X^2 - \pi \mid X) = 0$ donne le système

$$\begin{cases} 3a + 3b = 5 \\ 5a + 3b = 9 \end{cases}$$

Après résolution

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -1/3 \end{cases}$$

et après calcul

$$d = \sqrt{2/3}$$

Exercice 35 : [énoncé]
En introduisant sur $\mathbb{R}[X]$ le produit scalaire : $(P \mid Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$, la quantité cherchée est $m = d(X^3,\mathbb{R}_2[X])^2 = \left\|X^3 - p(X^3)\right\|^2$ avec p la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_2[X]$.
$p(X^3) = a + bX + cX^2$ avec $(p(X^3) \mid X^i) = (X^3 \mid X^i)$ pour $i = 0,1,2$.
La résolution du système ainsi obtenu donne $a = 1/20$, $b = -3/5$ et $c = 3/2$.
$m = \left\|X^3 - p(X^3)\right\|^2 = (X^3 - p(X^3) \mid X^3) = \frac{1}{2800}$.

Exercice 36 : [énoncé]
a) symétrie, bilinéarité et positivité : ok
Si $\varphi(P,P) = 0$ alors $\int_0^{+\infty} P^2(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 0$ donc (fonction continue positive d'intégrale nulle) $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $P(t) = 0$.
Comme le polynôme P admet une infinité de racines, c'est le polynôme nul.
b) Par intégration par parties, $\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = n!$ donc $\varphi(X^p,X^q) = (p+q)!$
c) $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(t^2 - (at+b))^2\,\mathrm{d}t = d(X^2,\mathbb{R}_1[X])^2 = \left\|X^2 - \pi\right\|^2$ avec $\pi = aX + b$ le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$.
$(X^2 - \pi \mid 1) = (X^2 - \pi \mid X) = 0$ donne $\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 6 \end{cases}$, $\begin{cases} a = 4 \\ b = -2 \end{cases}$ puis $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(t^2 - (at+b))^2\,\mathrm{d}t = 4$.

Exercice 37 : [énoncé]
Le cas $n = 1$ étant évident, on suppose désormais $n \geqslant 2$.
La quantité cherchée est $m = d(M,\mathrm{Vect}(I,J)) = \|M - p(M)\|$ avec p la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(I,J)$.
$p(M) = aI + bJ$ avec $(p(M) \mid I) = (M \mid I) = \mathrm{tr}(M)$ et $(p(M) \mid J) = (M \mid J) = \sigma$ avec σ la somme des coefficients de M.
La résolution de ce système donne $a = \frac{n\mathrm{tr}(M)-\sigma}{n(n-1)}$ et $b = \frac{\sigma-\mathrm{tr}(M)}{n(n-1)}$.
$m^2 = \|M - p(M)\|^2 = (M - p(M) \mid M) = \|M\|^2 - \frac{(n-1)\mathrm{tr}(M)^2 + (\mathrm{tr}(M)-\sigma)^2}{n(n-1)}$.

Exercice 38 : [énoncé]
En introduisant l'espace E des fonctions réelles f continues sur $]0,1]$ telles que $t\mapsto (tf(t))^2$ soit intégrable et en munissant cet espace du produit scalaire

$$(f \mid g) = \int_0^1 t^2 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

la quantité cherchée est : $m = d(f,F)^2$ avec $f : t\mapsto \ln t$ et $F = \mathrm{Vect}(f_0,f_1)$ où $f_0(t) = 1$ et $f_1(t) = t$.
$m = \|f - p(f)\|^2$ avec p la projection orthogonale sur F.
$p(f)(t) = a + bt$ avec $(p(f) \mid f_0) = (f \mid f_0)$ et $(p(f) \mid f_1) = (f \mid f_1)$.
La résolution du système ainsi obtenu donne $a = 5/3$ et $b = -19/12$.
$m = \|f - p(f)\|^2 = (f - p(f) \mid f) = 1/432$.

Exercice 39 : [énoncé]
a) Pour $P,Q\in E$, la fonction $t\mapsto P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}$ est définie et continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ et vérifie

$$t^2P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

On peut donc affirmer que cette fonction est intégrable sur $[0,+\infty[$ ce qui assure la bonne définition de $\langle\,,\rangle$.
On vérifie aisément que $\langle\,,\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique positive.
Si $\langle P,P\rangle = 0$ alors par nullité de l'intégrale d'une fonction continue positive

$$\forall t\in[0,+\infty[\,, P(t)^2\mathrm{e}^{-t} = 0$$

On en déduit que le polynôme P admet une infinité de racines et donc $P = 0$.
b) Pour $k \geqslant 1$ ou $k = 0$, on peut affirmer que les polynômes P_k et P_k' sont orthogonaux.
Par une intégration par parties

$$0 = \int_0^{+\infty} P_k'(t)P_k(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[P_k(t)^2\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} P_k(t)^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

On en déduit

$$P_k(0)^2 = \|P_k\|^2 = 1$$

c) F est un hyperplan (car noyau de la forme linéaire non nulle $P\mapsto P(0)$). Son orthogonal est donc une droite vectorielle. Soit Q un vecteur directeur de celle-ci.
On peut écrire

$$Q = \sum_{k=0}^n \langle P_k, Q\rangle P_k$$

Or

$$\langle P_k, Q\rangle = \langle P_k - P_k(0), Q\rangle + P_k(0)\langle 1, Q\rangle$$

Puisque le polynôme $P_k - P_k(0)$ est élément de F, il est orthogonal à Q et l'on obtient

$$\langle P_k, Q\rangle = P_k(0)\langle 1, Q\rangle$$

ce qui permet d'écrire

$$Q = \lambda\sum_{k=0}^n P_k(0)P_k \text{ avec } \lambda = \langle 1, Q\rangle \neq 0$$

On en déduit

$$d(1,F^\perp) = \frac{|\langle 1,Q\rangle|}{\|Q\|} = \frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{k=0}^n P_k(0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Enfin par Pythagore

$$\|1\|^2 = d(1,F)^2 + d(1,F^\perp)^2$$

et l'on obtient

$$d(1,F) = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

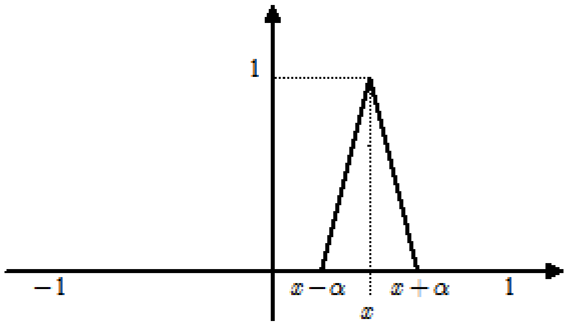

FIGURE 1 – La fonction f